III. FORCE GÉNÉRATRICE DE LA MARÉE

III.1 MOUVEMENTS DES ASTRES

Nous nous intéressons aux forces appliquées à un mobile dans un repère lié à la surface de la terre et dans le système constitué des trois astres : Soleil, Terre, Lune (il sera possible de vérifier a posteriori que l'influence des planètes sur les marées est parfaitement négligeable). Sous l'influence de leurs attractions gravitationnelles mutuelles, les astres parcourent des orbites qui peuvent être décrites par les lois de Kepler.

Nous appellerons **repère absolu** le système de coordonnées galiléen (sans accélération) lié au centre de masse du système solaire dans lequel les étoiles constituant la voûte celeste ont une direction fixe. Dans ce repère, le centre de masse du système Terre-Lune décrit une orbite elliptique, appelée **écliptique**, dont le centre de masse Soleil-Terre-Lune très proche du centre du Soleil, constitue l'un des foyers. La durée d'une révolution, appelée **année tropique** est égale à 365,2422 jours. Le point de l'orbite le plus proche du Soleil est appelé **périgée solaire**. Le périgée solaire décrit une révolution par rapport aux étoiles fixes en 209,4 siècles. La distance moyenne du soleil au système Terre-Lune est égale à 146,6 millions de km et l'excentricité de l'orbite est égale à 0,0167.

Dans un repère lié à la terre et en première approximation, la Lune décrit une ellipse dont le centre de masse du système Terre-Lune, très proche du centre de la terre, constitue l'un des foyers. Cette orbite, très perturbée par l'action gravitationnelle du Soleil, n'est en fait que grossièrement elliptique. L'orbite de la Lune est inclinée d'environ 5° sur l'écliptique. Le **noeud ascendant**, intersection du plan de l'orbite de la Lune et de l'écliptique, parcourt l'écliptique en 18,6 ans. La **révolution sidérale** est la période de révolution de la Lune sur son orbite ; rapportée à un repère absolu elle est égale en moyenne à 27 j 7 h 43 min. La **révolution synodique,** appelée également **mois lunaire** est l'intervalle de temps entre deux pleines lunes ou deux nouvelles lunes consécutives. Elle est égale en moyenne à 29 j 12 h 44 min. Rapporté à un repère absolu, le **périgée lunaire** fait une rotation complète en 8,8 ans. La distance moyenne de la Lune à la Terre est égale à 384 400 km et l'excentricité de l'orbite est égale à 0,0549.

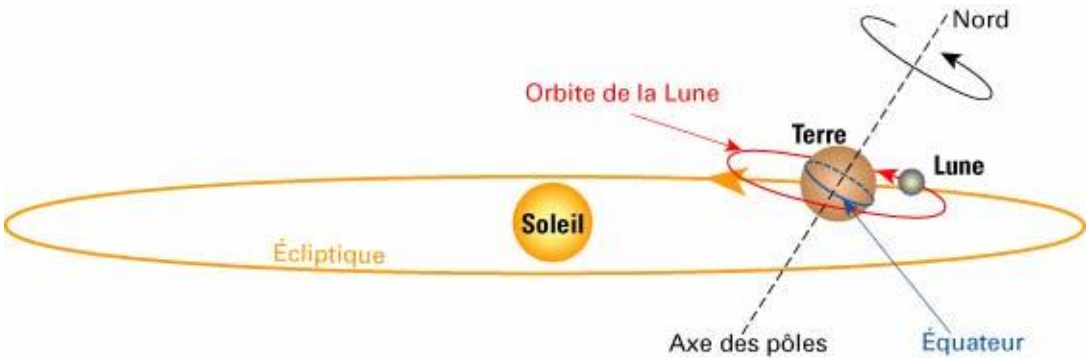

Figure III-1

La Terre est animée d'un mouvement de rotation de période 23 h 56 min, appelée **jour sidéral,** autour de l'**axe des pôles**. La période de passage au centre du Soleil d'un demi-plan méridien lié à la terre est le **jour solaire**. La durée du jour solaire moyen, appelé également jour de **temps moyen,** est, par définition, égale à 24 h. Le grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles est l'**équateur**. Le plan de l'équateur fait un angle de 23° 27' avec le plan de l'écliptique. Il coupe l'écliptique aux **points vernaux**, appelés également **points équinoxiaux** de printemps et d'automne. La **précession des équinoxes**, variation lente de la direction des points vernaux par rapport aux étoiles, n'intervient pas dans la théorie des marées.

En orientant l'axe des pôles positivement vers le Nord géographique, tous les mouvements se font dans le sens direct, à l'exception de celui du noeud ascendant.

III.2 CALCUL DE LA FORCE

Soit S le centre de masse du système Soleil-Terre-Lune, et les axes SX, SY et SZ, fixes par rapport aux étoiles, constituant un système de coordonnées galiléen, que nous appellerons repère absolu.

Soit T le centre de la Terre, et les axes Tx, Ty et Tz, liés à la terre. C'est dans ce repère, appelé repère terrestre que se manifeste le phénomène des marées. C'est donc par rapport à lui qu'il convient de calculer le mouvement des particules sous l'action des diverses forces qui leur sont appliquées. M étant la position d'une particule à la surface de la terre, il s'agit de calculer l'accélération de M dans le repère terrestre, soit $\vec{\gamma}_r = \dfrac{d_r^2\,\vec{TM}}{dt^2}$

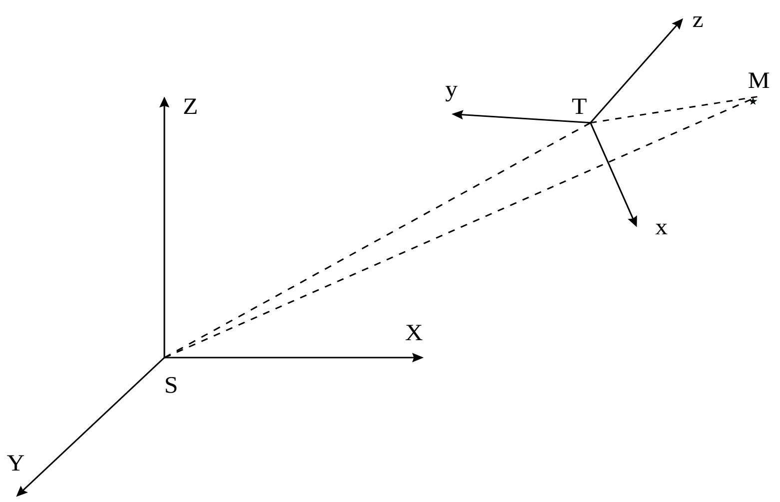

Figure III-2

Dans le repère absolu :

$$\frac{d_a^2\overrightarrow{TM}}{dt^2} = \frac{d_a^2\overrightarrow{SM}}{dt^2} - \frac{d_a^2\overrightarrow{ST}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma}_a\left(\overrightarrow{TM}\right) = \vec{\gamma}_a\left(\overrightarrow{SM}\right) - \vec{\gamma}_a\left(\overrightarrow{ST}\right)$$

Appelons $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de la terre. L'accélération du point M à la surface de la terre, rapportée au repère absolu, peut être calculée aisément en s'aidant de la composition des vitesses :

$$\frac{d_a\,\overrightarrow{TM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM} + \frac{d_r\,\overrightarrow{TM}}{dt}$$

D'où l'expression de l'accélération absolue en fonction des coordonnées terrestres :

$$\frac{d_a^2\,\overrightarrow{TM}}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge \frac{d_a\,\overrightarrow{TM}}{dt} + \frac{d_r}{dt}\left(\frac{d_a\,\overrightarrow{TM}}{dt}\right) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \frac{d_r\,\overrightarrow{TM}}{dt} + \frac{d_r^2\,\overrightarrow{TM}}{dt^2}$$

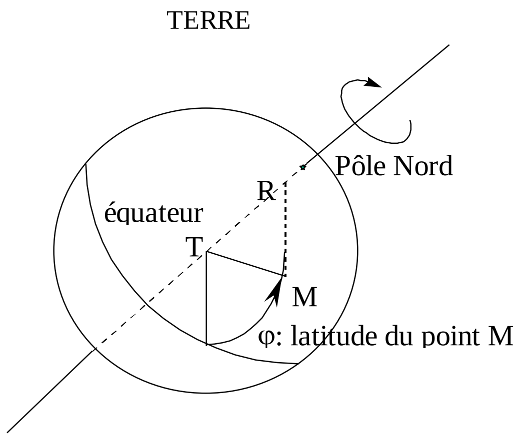

Figure III-3

Soit φ la latitude du point M (angle entre la verticale TM et le plan de l'équateur) et R sa projection sur l'axe des pôle.

Le terme $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM}\right) = \omega^2\,\overrightarrow{RM}$ est la force centrifuge appliquée à un objet de masse unité situé à la latitude φ

$2\vec{\omega} \wedge \dfrac{\mathbf{d_r}\ \overrightarrow{\mathbf{TM}}}{\mathbf{dt}} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V_r}}(\mathbf{M})$ est la force de Coriolis qui dévie vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud, un mobile M à la latitude φ animé d'une vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{M})$

On a supposé que le vecteur rotation terrestre $\vec{\omega}$ était constant, bien que ce ne soit pas tout à fait exact. Sa direction subit des variations lentes et de faible amplitude, appelées **dérive des pôles**, dues aux modifications de la répartition des masses dans le magma. Elle présente en outre des oscillations périodiques appelées **nutation**. Son module lui-même varie en raison, d'une part de modifications de la répartition des masses dans l'atmosphère et les océans dues à des variations météorologiques, saisonnières ou climatiques, d'autre part de la dissipation d'énergie du système Terre-Lune due au phénomène des marées, qui se traduit par un ralentissement de la rotation terrestre. Mais tous ces phénomènes sont de très faible amplitude ou sont très lentement variables, ce qui justifie l'approximation adoptée pour l'étude des marées sur une période pouvant couvrir plusieurs siècles.

Des expressions précédentes, on déduit aisément :

$$\vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) = \vec{\gamma}_a(\mathbf{M}) - \vec{\gamma}_a(\mathbf{T}) - \omega^2\ \overrightarrow{\mathbf{RM}} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{M})$$

$\vec{\gamma}_a(\mathbf{M})$ est égal à la somme des forces extérieures appliquées à la masse unité située au point M. Ces forces sont :

$\boldsymbol{P}$ = forces de pression hydrostatique
$\boldsymbol{F_R}$ = forces de frottement
$\boldsymbol{G}$ = force d'attraction gravitationnelle exercée par la terre
$\boldsymbol{H_A}(\mathbf{M})$ = force d'attraction gravitationnelle exercée par un astre A au point M
$\vec{\gamma}_a(\mathbf{M}) = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F_R} + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{H_A}(\mathbf{M})$

$\vec{\gamma}_a(\mathbf{T})$ est égal à la somme des forces appliquées à la masse unité située au centre de la terre. La seule force à prendre en compte est la force d'attraction gravitationnelle exercée au point T par un astre, soit $\boldsymbol{H_A}(\mathbf{T})$. On obtient donc finalement :

$$\vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) = \boldsymbol{H_A}(\mathbf{M}) - \boldsymbol{H_A}(\mathbf{T}) + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{G} - \omega^2\ \overrightarrow{\mathbf{RM}} + \boldsymbol{F_R} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{M})$$

Pour une particule au repos, les forces de frottements $\boldsymbol{F_R}$ et la vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{M})$ sont nulles.

Par ailleurs, les forces de pression $\boldsymbol{P}$ sont équilibrées par la « pesanteur ordinaire » $\boldsymbol{G} - \omega^2\ \overrightarrow{\mathbf{RM}}$

En assimilant l'accélération relative $\vec{\gamma}_r(\mathbf{M})$ à une force $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathbf{M})$ exercée sur un corps de masse unité situé au point M, on obtient finalement l'expression de la force génératrice de la marée exercée par un astre A au point M :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}(\mathbf{M}) = \boldsymbol{H_A}(\mathbf{M}) - \boldsymbol{H_A}(\mathbf{T})}$$

La force génératrice de la marée en un point est égale à la différence des attractions gravitationnelles exercées par un astre en ce point et au centre de la terre.

III.3 REGLE DE PROCTOR

Selon la loi de l'attraction universelle, deux corps s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. Soient Δ et r les distances respectives d'un point M et du centre de la terre au centre de gravité d'un astre A de masse $\boldsymbol{m_A}$. La force génératrice de la marée exercée au point M par l'astre A s'écrit :

$$\vec{F} = k \;\; m_A \left(\frac{\vec{v}}{\Delta^2} - \frac{\vec{u}}{r^2} \right)$$

$\vec{v}$ **et** $\vec{u}$ **sont les vecteurs unitaires de** $\overrightarrow{\mathbf{MA}}$ **et** $\overrightarrow{\mathbf{TA}}$, k est la constante de l'attraction universelle

M: observateur
T: centre de la terre
A: astre

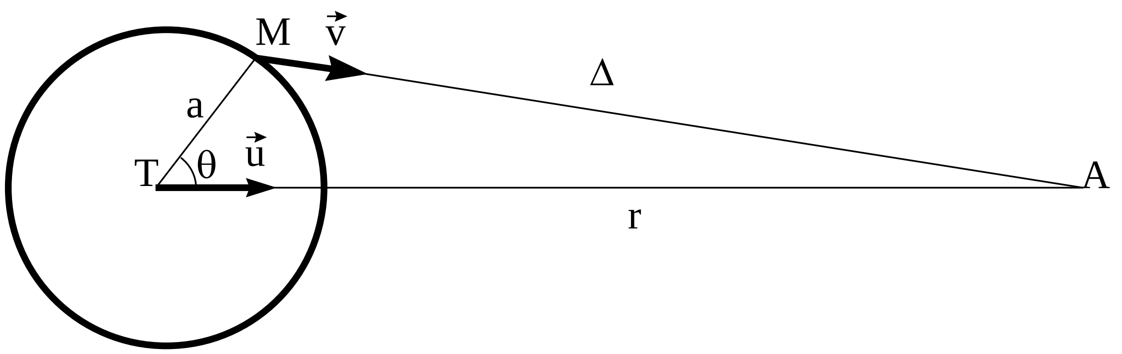

Figure III-4

Un construction géométrique permet de fournir aisément une expression simple de cette force : Plaçons le point B sur le segment TA tel que MB soit l'arc de cercle de centre A et de rayon Δ.

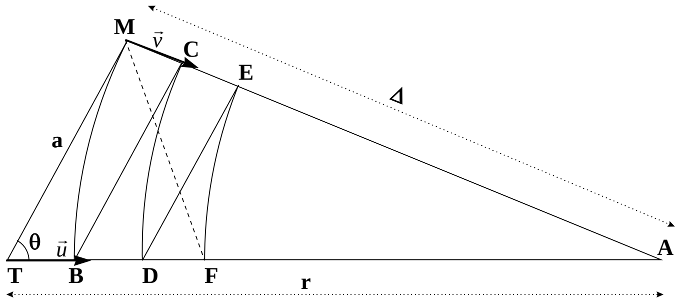

Figure III-5

Plaçons C sur le segment AM tel que BC soit parallèle à TM. Le théorème de Thalès s'appliquant aux triangles ABC et ATM on a, $\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AT}}$.

Plaçons D sur le segment TA tel que $\mathrm{AD} = \mathrm{AC} = \dfrac{\Delta^2}{r}$

Plaçons E sur le segment MA tel que DE soit parallèle à TM : $\mathrm{AE} = \mathrm{AD}\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AT}}$.

Plaçons F sur le segment TA tel que $\mathrm{AF} = \mathrm{AE} = \dfrac{\Delta^3}{r^2}$.

Considérant l'égalité $\overrightarrow{\mathbf{AF}} = \overrightarrow{\mathbf{AM}} + \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, on en déduit : $\overrightarrow{\mathbf{MF}} = \mathbf{\Delta^3}\left(\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathbf{\Delta^2}} - \dfrac{\vec{\boldsymbol{u}}}{\boldsymbol{r}^2}\right)$ et, d'après l'expression précédente de la force génératrice de la marée :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\boldsymbol{k}\ \ \boldsymbol{m}_{\mathbf{A}}}{\mathbf{\Delta^3}}\overrightarrow{\mathbf{MF}}}$$

On obtient ainsi une construction géométrique de la force.

En supposant l'astre à l'infini, cette construction se simplifie : le point F est situé à une distance du centre de la terre T égale à trois fois la projection du point M sur la droite joignant T à l'astre. Cette approximation est justifiée dans le cas de la Lune, et a fortiori du Soleil.

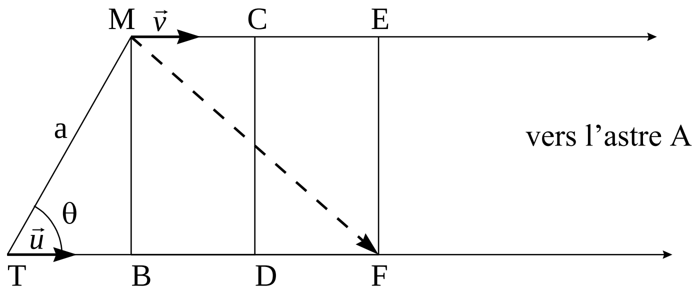

Figure III-6

Cette construction a reçu le nom de **Règle de Proctor**. Elle permet d'obtenir simplement l'expression du module de la force : dans le triangle MTF

$$\mathrm{MF}^2 = \mathrm{MT}^2 + \mathrm{TF}^2 - 2\mathrm{MT}\ \mathrm{TF}\cos\theta = a^2\left(1+3\cos^2\theta\right)$$

d'où : $\left|\vec{F}\right| = \dfrac{k m_A\, a}{\Delta^3}\sqrt{3\cos^2\theta+1}$

En introduisant l'accélération de la pesanteur $g = \dfrac{k m_T}{a^2}$ où m_T est la masse de la terre et en faisant l'approximation $\Delta \cong r$:

$$\boxed{\left|\vec{F}\right| = g\,\frac{m_A}{m_T}\left(\frac{a}{r}\right)^3\sqrt{3\cos^2\theta+1}}$$

La force génératrice de la marée varie comme la masse de l'astre et en raison inverse du cube de sa distance. Elle est minimum lorsque la distance zénithale θ de l'astre est égale à 90°, ce qui correspond au passage de l'astre à l'horizon. Elle ne s'annule jamais. Elle passe par un maximum lorsque l'astre traverse le plan méridien de l'observateur ; θ passe alors par un extremum.

La variation de la force dépend en premier lieu des variations de la distance zénithale de l'astre. La figure suivante représente le plan méridien de l'observateur.

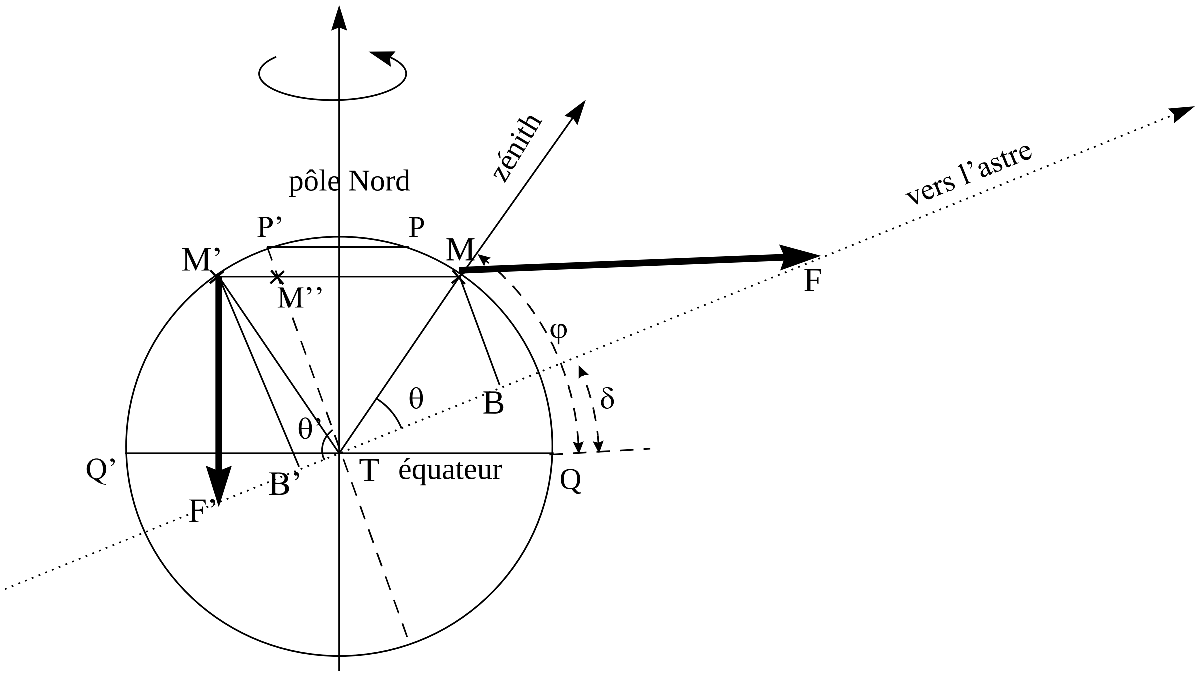

Figure III-7

Pour un observateur situé à la latitude φ, $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{M'F'}$ représentent la force génératrice de la marée, respectivement lorsque l'astre passe dans le demi-plan méridien supérieur et lorsqu'il passe dans le demi-plan méridien inférieur au cours de la rotation diurne de la terre autour de son axe. Le point M" est le point où l'observateur observe l'astre à l'horizon, ce qui correspond à un minimum du module de la force. En effet, $\cos^2\theta$ est alors égal à zéro.

Si la latitude φ est du même signe que la déclinaison δ, le point M correspond à un maximum supérieur à celui correspondant au point M'. Au contraire, si la latitude et la déclinaison sont de signe contraire, la force est maximale en M'.

Pour un observateur situé à l'équateur (φ = 0), les deux maximums sont égaux.

Si $|\varphi + \delta| > 90°$, l'astre ne passe plus au-dessous de l'horizon : le maximum secondaire disparaît.

III.4 VALEUR DE LA FORCE

$$\text{Lune : } \begin{cases} \dfrac{m_L}{m_T} = \dfrac{1}{81{,}30} \\[2ex] \dfrac{a}{r_L} = \dfrac{1}{60{,}27} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_L}{m_T}\left(\frac{a}{r_L}\right)^3 = \frac{1}{17\,798\,939} \cong 5{,}6\ 10^{-8}$$

$$\text{Soleil : } \begin{cases} \dfrac{m_S}{m_T} = 332\,946 \\ \\ \dfrac{a}{r_S} = \dfrac{1}{23455} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_S}{m_T}\left(\frac{a}{r_S}\right)^3 = \frac{1}{38\,755\,425} \cong 2{,}6\ 10^{-8}$$

Ces valeurs expriment la force génératrice de la marée en unités de g. Elles amènent les commentaires suivants :

La force exercée par la Lune est un peu plus de deux fois plus importante que celle exercée par le soleil. Malgré sa faible masse, la relative proximité de la Lune lui confère une importance plus grande du fait de la loi en $\left(\dfrac{a}{r_A}\right)^3$.

La force génératrice de la marée est très faible vis-à-vis de la pesanteur. Il s'ensuit que sa composante verticale est négligeable. Seule sa composante horizontale est susceptible de mettre en mouvement les particules fluides et donc de jouer un rôle dans le phénomène des marées tel qu'il est observé.

III.5 POTENTIEL GENERATEUR

La force d'attraction gravitationnelle exercée sur une masse unité par un astre de masse m_A situé à la distance *r* est égale à $\vec{F} = k\dfrac{m_A}{r^2}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'astre et *k* la constante universelle de la gravitation.

En posant $V = k\dfrac{m_A}{r}$, $\vec{F}$ peut être exprimé à l'aide de la formule : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$.

En d'autres termes :

la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ dérive du potentiel gravitationnel V.

Cette force a pour composantes :

$$\begin{cases} F_x = k\dfrac{m_A}{r^2}\alpha \\ F_y = k\dfrac{m_A}{r^2}\beta \quad : \text{où } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ sont les cossinus directeurs du vecteur } \vec{u} \\ F_z = k\dfrac{m_A}{r^2}\gamma \end{cases}$$

Soit $\vec{F}$ la force d'attraction gravitationnelle sur l'unité de masse au point $\mathrm{T}(x_\mathrm{T}, y_\mathrm{T}, z_\mathrm{T})$ et V_T le potentiel en ce point. Déplaçons le point d'application de cette force en $\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. Au cours de ce déplacement, le potentiel V vérifie constamment la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz = -\frac{k\,m_A}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

En intégrant selon chacune des composantes de la force, on obtient:

$$V = V_T - \frac{km_A}{r^2}\left[\alpha(x - x_t) + \beta(y - y_t) + \gamma(z - z_t)\right] = V_T - \frac{km_A}{r^2}\vec{u}\,\overrightarrow{TM}$$

La différence entre les potentiels aux points T et M est égal au travail de la force lorsqu’on déplace son point d'application de T à M.

Appliquons ces résultats à la force génératrice de la marée $\vec{F}(\mathrm{M}) = \boldsymbol{H}_\mathrm{A}(\mathrm{M}) - \boldsymbol{H}_\mathrm{A}(\mathrm{T})$: elle dérive du potentiel $V = V_1 + V_2$ où V_1 est le potentiel dont dérive la force $-\boldsymbol{H}_\mathrm{A}(\mathrm{T})$ appliquée au point M et V_2 le potentiel dont dérive la force $\boldsymbol{H}_\mathrm{A}(\mathrm{M})$.

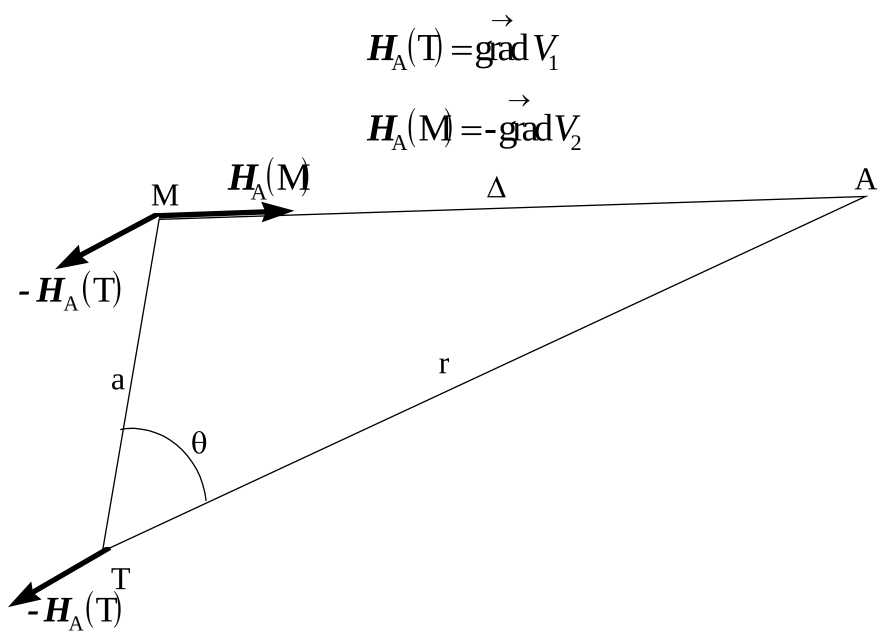

Figure III-8

$$V_1 = -\frac{k\,m_A}{r} - \frac{k\,m_A}{r^2}a\cos\theta \quad \begin{pmatrix}\text{opposé du potentiel gravitationnel en T,}\\ \text{corrigé du travail de la force entre T et M}\end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{k\,m_A}{\Delta} \quad \text{(potentiel gravitationnel en M)}$$

$$\boxed{V = V_1 + V_2 = k\,m_\mathrm{A}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\cos\theta\right)}$$

Dans le triangle ATM :

$$\Delta^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$\text{d'où } \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Cette expression met en évidence le rapport $\frac{a}{r}$ dont la faible valeur va permettre de mettre le potentiel sous la forme d’une série rapidement convergente. On peut faire ce développement directement, mais il paraît plus judicieux de passer par l'intermédiaire des polynômes de Legendre. On montre que

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^n \mathrm{P}_n(x)$$

où les P_n sont les polynômes de Legendre définis par les relations suivantes :

$$\mathrm{P}_0(x)=1$$

$$\mathrm{P}_1(x)=x$$

$$\mathrm{P}_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}x\,\mathrm{P}_n(x)-\frac{n}{n+1}\mathrm{P}_{n-1}(x)$$

Il s'ensuit une expression du potentiel générateur de la marée sous la forme d'un développement en polynômes de Legendre où l'on remarque que les termes en P_0 et en P_1 s'éliminent :

$$V=\frac{k\,m}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}}\right)^n \mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

$$\text{avec}\begin{cases}\mathrm{P}_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\\ \mathrm{P}_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right)\\ \mathrm{P}_4(\cos\theta)=\frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3\right)\\ \ldots\end{cases}$$

En introduisant l'accélération de la pesanteur $g=\frac{k\,m_{\mathrm{T}}}{\mathrm{a}}$ et en posant, selon l'usage :

$i=\frac{r_0}{r}$ où r_0 est la distance moyenne de l'astre,

$$V=\frac{m}{m_{\mathrm{T}}}g\frac{a^4}{r_0^3}\sum_{n=2}^{\infty}i^{n+1}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-2}\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

$\frac{a}{r}$ est voisin de $\frac{1}{60}$ pour la Lune et de $\frac{1}{23400}$ pour le Soleil . Les termes de la série sont donc rapidement décroissants. En pratique, seuls les deux premiers termes sont conservés, et on pourra, en première approximation, limiter le développement au terme en P_2, soit

$$V\cong\frac{m}{m_{\mathrm{T}}}g\frac{a^4}{r_0^3}i^3\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right).$$

Le potentiel générateur de la marée est constitué de la somme du potentiel relatif à la Lune et du potentiel relatif au Soleil. Il est appelé **potentiel luni-solaire**.

III.6 COORDONNEES HORAIRES

On appelle **plan méridien** un plan passant par l'axe des pôles. L'angle entre le plan méridien d'un observateur et le plan méridien d'un astre, compté positivement vers l'astre dans le sens rétrograde (sens positif vers le pôle nord),

est appelé **angle horaire** de l'astre. Il est souvent compté en heures (15° = 1 heure) et est généralement représenté par le sigle $\mathcal{AH}$.

L'angle entre la direction d'un astre et le plan de l'équateur, compté positivement vers le nord, est la **déclinaison** de l'astre Elle est généralement représentée par la lettre grecque δ. AH et δ sont appelés **coordonnées horaires** de l'astre.

Appelons L la latitude de l'observateur (angle que fait la direction du zénith avec le plan de l'équateur).

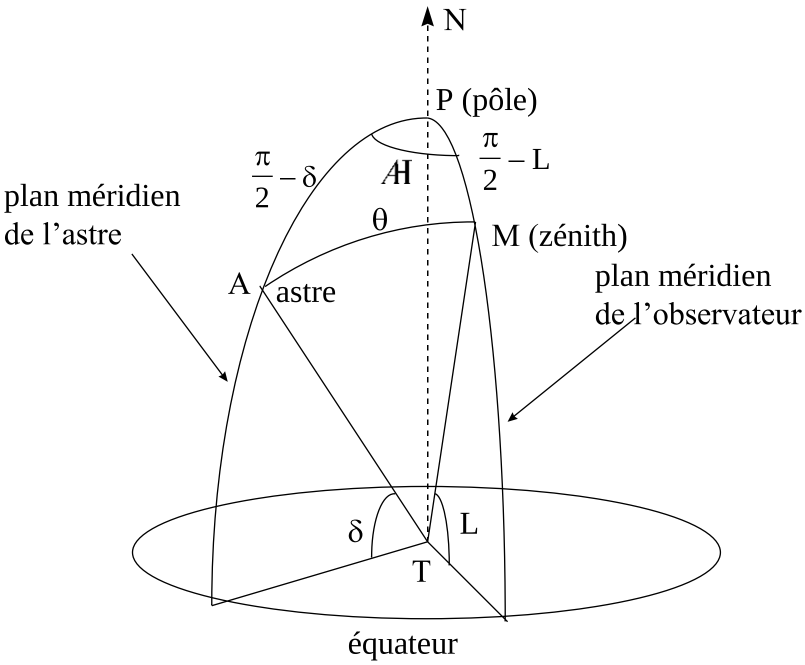

Figure III-9

L'expression de $\cos\theta$ en fonction des coordonnées horaires de l'astre peut être obtenue en effectuant le produit scalaire $\vec{TM}\,\vec{TA}$ qui permet d'établir la relation fondamentale liant les éléments du triangle sphérique PAM :

$$\cos\theta = \sin L\ \sin\delta + \cos L\ \cos\delta\ \cos AH$$

En remplaçant $\cos\theta$ par sa valeur dans l'expression du potentiel, on obtient :

$$\boxed{V = \frac{3}{4} ga \frac{m}{m_T}\left(\frac{a}{r_0}\right)^3 i^3 \left[\left(\sin^2 L - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\delta - \frac{1}{3}\right) + \sin 2L\ \sin 2\delta\ \cos AH + \cos^2 L\ \cos^2\delta\ \cos 2AH\right]}$$

Il apparaît une somme de trois termes : $V = V_0 + V_1 + V_3$

Posons $C = \frac{3}{4} ga \frac{m}{m_T}\left(\frac{a}{r_0}\right)^3$, coefficient constant.

$V_0 = C i^3 \left(\sin^2 L - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\delta - \frac{1}{3}\right)$ est le terme à **longue période**. Il varie avec la déclinaison de l'astre. Le sinus de la déclinaison intervenant par son carré, sa période est la moitié de la période de révolution de l'astre, soit environ 14 jours pour la Lune et 6 mois pour le Soleil. Il s'annule aux latitudes L telles que $\sin L = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, soit $L = 35°16'$ N et $L = 35°16'$ S. C'est un terme **zonal** : ses nodales (lieu des points où il s'annule) sont des parallèles (lignes d'égale latitude). Il est intéressant de noter que la moyenne de ce terme, au cours d'une révolution de l'astre sur son orbite, n'est pas nulle.

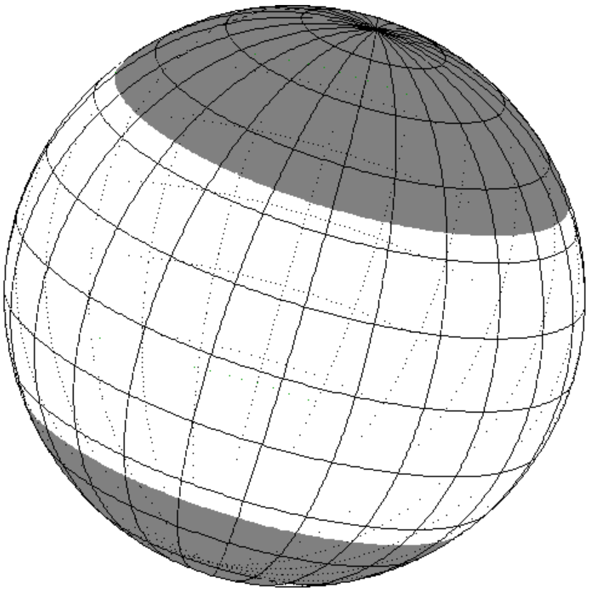

Figure III-10 Terme longue période : répartition zonale

- $V_1 = C i^3 \sin 2L \ \sin 2\delta \cos AH$ est le terme **diurne**. Ses nodales sont le grand cercle méridien normal à la direction de l'astre ($\cos AH = 0$) et l'équateur ($\sin 2L = 0$). C'est un terme **tesséral** dont le signe change avec celui de la déclinaison de l'astre. La périodicité de l'angle horaire est approximativement de 24h pour le Soleil et de 24h 50min pour la Lune. Les variation de la déclinaison et de la distance de l'astre, dont les périodicités sont respectivement annuelle et mensuelle, sont lentes devant celle de l'angle horaire. Elles interviennent comme une modulation de l'amplitude de ce terme dont la période est voisine de 24h et qui, de ce fait, est appelé diurne. Le terme diurne est maximum lorsque l'astre traverse le demi-plan méridien supérieur ($AH = 0$). Son amplitude est maximum lorsque la déclinaison est maximum en valeur absolue (environ 23° pour le Soleil et 28° pour la Lune) et aux latitudes 45°N et 45°S. Il s'annule à l'équateur et lorsque la déclinaison de l'astre est nulle.

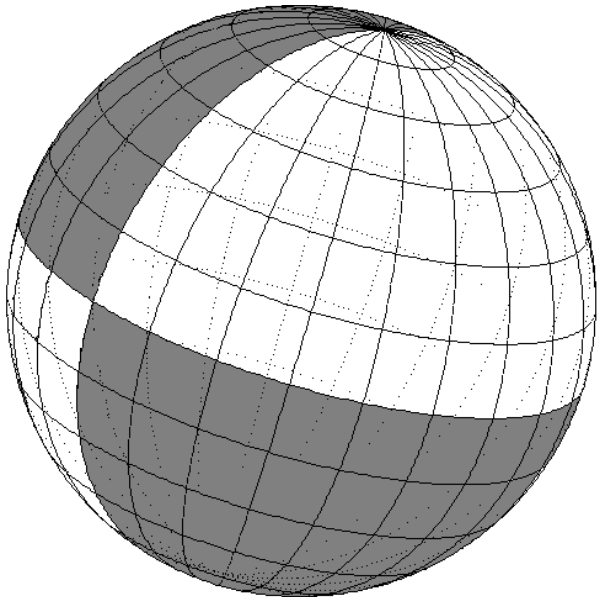

Figure III-11 Terme diurne (tesséral)

- $V_2 = C i^3 \cos^2 L \ \cos^2 \delta \cos 2AH$ est le terme **semi-diurne**. Il admet comme nodales les méridiens situés à 45° du méridien de l'astre qui divisent la terre en quatre secteurs où il est tantôt positif, tantôt négatif. C'est un terme **sectoriel**.. Il admet deux maximums et deux minimums par jour, du fait de la périodicité de $\cos 2AH$. Il est maximum pour un observateur situé à l'équateur ($\cos^2 L = 1$) et au moment du passage de l'astre à l'équateur ($\cos^2\delta = 1$).Il est nul aux pôles.

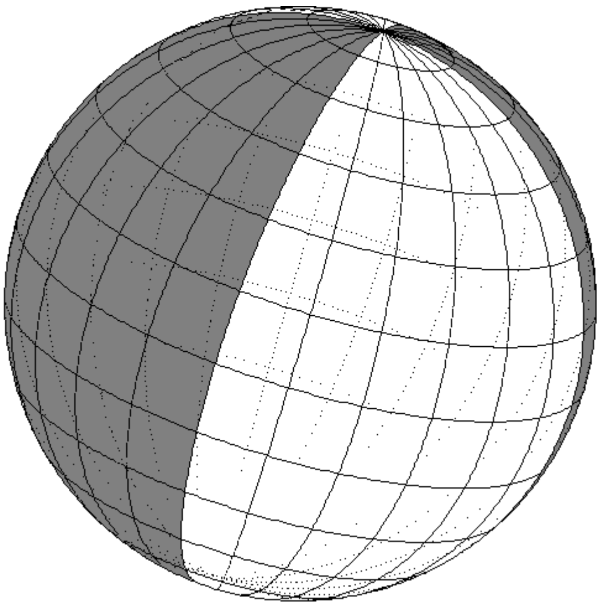

Figure III-12 Terme semi-diurne (sectoriel)