FORMULATION DE LA MÉTHODE DE CALCUL

Avertissement :

Tout calcul réalisé à partir de la formulation et des constantes ci-dessous ne peut engager la responsabilité du SHOM

1. GÉNÉRALITÉS

La marée est un mouvement oscillatoire du niveau de la mer dû aux effets de l'attraction de la lune et du soleil sur les particules liquides.

Ce phénomène peut être correctement représenté comme résultant de la composition d'un nombre illimité d'oscillations élémentaires strictement périodiques. Ainsi la hauteur de la marée à un instant quelconque *t* peut s'exprimer par la formule suivante :

$$h(t) = Zo + \sum_j \sum_i A_{ij} \cos(V_{ij} - G_{ij}) \tag{1}$$

où *Zo* est le niveau moyen autour duquel oscille le niveau de l'eau. Il permet de rapporter la hauteur d'eau au zéro de référence des cartes qui est généralement le niveau des plus basses mers.

- A_{ij} *et* G_{ij} sont respectivement l'amplitude et la situation d'une onde élémentaire qui ne dépendent que du port considéré.
- V_{ij} est l'argument astronomique lié au temps *t*.

L'indice *i* caractérise la nature de l'onde, l'indice *j* se rapporte à sa période. Ainsi :
j = 0 pour les ondes annuelles.
j = 1 pour les ondes "diurnes" qui ont une période voisine de la journée.
j = 2 pour les ondes "semi-diurnes" qui ont une période voisine de la demi-journée, etc.

La formule (1) est appelée "formule harmonique de la marée".

Historiquement, cette formule n'a pas toujours eu exactement la même forme.

En effet, c'est en 1867 que Lord Kelvin a montré qu'on pouvait décomposer le potentiel luni-solaire, générateur de la marée, en une somme de termes fonction du temps moyen et de la forme $C_i \cos(q_i t - \alpha_i)$.

A chacun de ses termes il faisait correspondre une marée partielle de même période dont l'amplitude et le déphasage étaient déduits de l'analyse de séries d'observations appropriées et dont la superposition constituait la marée réelle.

En 1883, Darwin proposa un développement quasi harmonique, où la hauteur d'eau se trouvait être égale à la somme d'une série finie de "composantes", de la forme :

$$h(t) = Zo + \sum_i f_i A_i \cos(q_i t + V_{o_i} + u_i - K_i) \tag{2}$$

A_i et K_i sont appelées les "constantes harmoniques" du port considéré, f_i et u_i sont des éléments astronomiques (appelés termes nodaux), fonction du temps, mais leur période étant voisine de 18 ans 2/3, leur évolution est suffisamment lente pour qu'ils puissent être considérés comme constants sur une durée de l'ordre d'un an. V_{oi} est la valeur de l'argument astronomique pour t = 0.

En fait, chaque composante est elle-même une composition d'ondes élémentaires de périodes très voisines qui ne peuvent être séparées par l'analyse qu'à partir de séries d'observations de très longue durée.

C'est en 1921 que Doodson, après avoir poussé plus loin le développement du potentiel générateur, publia pour la marée une formule purement harmonique de la forme (1). Les corrections nodales qui étaient apportées par Darwin à chaque onde principale par l'intermédiaire des termes nodaux f_i et u_i sont déduites du regroupement des ondes de périodes très voisines et d'hypothèses simples sur le rapport de leur amplitude et sur leur déphasage. Le calcul automatique de la hauteur d'eau en est facilité.

Si le nombre d'ondes élémentaires composant la marée doit être considéré comme illimité, seules un certain nombre d'entre elles ont une amplitude d'une valeur suffisante pour avoir une influence sensible sur la hauteur d'eau. Il est ainsi possible d'obtenir une précision de quelques centimètres en ne prenant en compte qu'un nombre restreint d'ondes.

On notera que cette précision est largement suffisante dans la mesure où le niveau de l'eau peut subir des perturbations d'origine météorologique de quelques dizaines de centimètres qu'il est impossible de prévoir à moyen ou long terme.

Ainsi, dans cet ouvrage, afin de rendre accessible le calcul de la marée aux calculatrices de poche programmables de faible capacité mémoire, nous nous sommes limités à 10 ondes principales :

onde annuelle : S_a
ondes diurnes : luni-solaire K_1
lunaires O_l et Q_1
ondes semi-diurnes : lunaires M_2 et N_2
solaire S_2
ondes quart-diurnes: MN_4, M_4 et MS_4

D'autres ondes sont prises en compte dans le calcul, mais elles se déduisent automatiquement des précédentes. Il s'agit des ondes semi-diurnes $2N_2$, μ_2, v_2, L_2, T_2 et K_2 et de l'onde diurne P_1.

De même, les ondes additionnelles de périodes voisines de M_2, K_2, O_1 et K_1 , correspondant aux “corrections nodales” de ces ondes, ont été intégrées au calcul.

Au total, 21 ondes élémentaires ont été sélectionnées pour calculer la marée à travers le monde avec une précision suffisante pour la navigation quel que soit le type de la marée : semi-diurne, diurne, mixte ou de petits fonds (à l'exclusion des marées fluviales).

2. FORMULATION DE LA MÉTHODE

2.1. A chaque onde correspond une identification, une vitesse angulaire (en degrés par heure), une amplitude (en mm) et une situation (en degrés).
L'argument astronomique V_{ij} s'exprime par la formule

$$V_{ij} = 15jt + n_1 s + n_2 h + n_3 p + n_4 N' + n_5 p_1 + n_6 D \qquad (3)$$

où :

t est le temps solaire moyen local exprimé en heures décimales
n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 sont des coefficients constants entiers
h : la longitude moyenne du soleil
s : la longitude moyenne de la lune
p : la longitude du périgée de la lune
N: la longitude du nœud ascendant de la lune et N' = - N
p_1: la longitude du périgée du soleil
D = 90°
n_6 = 0 ou 1 ou - 1 pour que le terme correspondant du potentiel soit de la forme G cos V_{ij}, avec G positif.

Ces paramètres exprimés en degrés sont, en première approximation, des fonctions linéaires du nombre T de jours écoulés depuis l'instant origine des temps qui peut être choisi de façon arbitraire (voir paragraphe 3).

Si l'on choisit pour cet instant le 1er janvier 1980 à 00 h 00 (UT), ce nombre T s'exprime par la formule:

$$T = E\left[30{,}6001\left(1 + M + 12.E\left[\frac{1}{M+1} + 0{,}7\right]\right)\right] + E\left[365{,}25\left(a - E\left[\frac{1}{M+1} + 0{,}7\right]\right)\right] + J + \frac{t}{24} - 723258 \qquad (4)$$

où

E [ ] signifie “partie entière de... ”
a est l'année (quatre chiffres ex. : 1981)
M le mois de l'année compté de 1 à 12
J le jour dans le mois (de 1 à 31)
t l'heure.

NOTA. - Cette formule ne tient pas compte du fait que les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles (à l'exception de celles qui sont multiples de 400). Elle n'est donc valable que pour les dates comprises entre le 1er mars 1900 et le 28 février 2100.

Pour les dates antérieures, qui peuvent présenter un intérêt pour des recherches historiques, il convient d'utiliser pour T la valeur corrigée

$$T_c = \mathbf{T} + n$$

avec:

n = 1 pour les dates comprises entre le 1er mars 1800 et le 28 février 1900
n = 2 pour les dates comprises entre le 1er mars 1700 et le 28 février 1800
n = 3 pour les dates comprises entre le 15 octobre 1582 et le 28 février 1700.

Le 15 octobre 1582 est en effet la date origine du calendrier grégorien.
Avant cette date le calcul serait encore possible, mais il faudrait prendre : n = 13.

2.2. Calcul de la hauteur d'eau à un instant quelconque

Le calcul d'un grand nombre de hauteurs à l'aide de la formule précédente nécessite un temps de calcul important.
La méthode décrite ci-dessous est précise et rapide.
Posons:

$$X_j(t) = \sum_i A_{ij} \cos(V_{ij} - G_{ij}) \tag{5}$$

$$Y_j(t) = \sum_i A_{ij} \sin(V_{ij} - G_{ij})$$

$X_j(t)$ et $Y_j(t)$ sont les composantes d'un vecteur dont le module est:

$$R_j(t) = \sqrt{X_j^2(t) + Y_j^2(t)}$$

et dont la direction fait avec l'axe des abscisses un angle $\varphi_j(t)$ tel que:

$$\cos \varphi_j(t) = X_j(t) / R_j(t)$$

et

$$\sin \varphi_j(t) = Y_j(t) / R_j(t)$$

$R_j(t)$ et φ_j (t) peuvent être obtenus avec une bonne précision à partir de leurs valeurs à 0 h et à 24 h:

(6)

$$R_J(t) = R_j(0) + \frac{t}{24}\left[R_j(24) - R_j(0)\right]$$

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(0) + \frac{t}{24}\left[j \times 360 + \delta_j(\varphi)\right]$$

avec $\delta_j(\varphi) = \varphi_j(24) - \varphi_j(0) + n \times 360$ où on donne à n la valeur 0, 1 ou - 1 afin que $\delta_j(\varphi)$ soit toujours compris entre – 180° et + 180°. La hauteur de la marée est par suite:

$$h(t) = Zo + \sum_j R_j(t) \cos \varphi_j(t) \tag{7}$$

2.3. Calcul des heures de pleine et basse mer

Les heures t_{pb} des pleines et basses mers sont telles que la dérivée de $h(t)$ soit nulle lorsque $t = t_{pb}$ **:**

$$\sum_j \left\{ \frac{\pi}{180} R_j(t_{pb}) \left(15j + \frac{\delta_j(\varphi)}{24}\right) \sin\left[\varphi_j(t_{pb})\right] - \frac{R_j(24) - R_j(0)}{24} \cos\left[\varphi_j(t_{pb})\right] \right\} = 0 \tag{8}$$

Cette équation peut être résolue par la méthode d'approximations successives de Newton. Il est nécessaire de connaître une valeur approchée de t_{pb}. En pratique, on utilise une forme approchée de cette formule.

2.3.1. Calcul approché de t_{pb}

Cette heure peut être choisie égale à celle de l'extremum du terme diurne (j = 1) ou semi-diurne (j = 2).
On commence donc par comparer les amplitudes des termes $R_1(t)$ et $R_2(t)$ à midi pour le jour considéré.

Si $R_2(12) > 0{,}5\ R_1(12)$ la marée est semi-diurne.

Si $R_2(12) < 0{,}25\ R_1(12)$ la marée est diurne.

Si $0{,}25\ R_1(12) < R_2(12) < 0{,}5\ R_1(12)$ le type de marée dépend aussi des phases φ_1 et φ_2. Pour limiter la taille du programme, on traite ce cas comme une marée semi-diurne.

Ce cas est rare et correspond à une situation de la marée n'ayant pas une pleine ou une basse mer bien marquée.

Posons j = 1 ou 2 suivant que la marée est diurne ou semi-diurne :

- Si $-180° < \varphi_j(0) < O$ le premier extremum du terme, $R_j(t) \cos \varphi_j(t)$ est un maximum et correspond à une pleine mer.

L'heure approchée t_{p1} de cette pleine mer est celle qui annule l'équation :

$$\varphi_j(t_{p1}) = \varphi_j(0) + \frac{t_{p1}}{24}(360\,j + \delta_j(\varphi)) = 0$$

soit

$$t_{p1} = -24 \bullet \frac{\varphi_j(0)}{360\,j + \delta_j(\varphi)} \qquad (9)$$

- Si $0 < \varphi_j(0) < 180°$ le premier extremum du terme $R_j(t) \cos(\varphi_j(t))$ est un minimum et correspond à une basse mer. L'heure approchée t_{b1} de cette basse mer est telle que :

$$\varphi_j(t_{b1}) = \varphi_j(0) + \frac{t_{p1}}{24}(360\,j + \delta_j(\varphi)) = 180°$$

soit

$$t_{b1} = +24 \bullet \frac{180 - \varphi_j(0)}{360\,j + \delta_j(\varphi)} \qquad (10)$$

- Les heures approchées des pleines et basses mers suivantes de la journée se déduisent des valeurs précédentes en y ajoutant le terme:

$$(i-1) \bullet \frac{180}{360\,j + \delta_j(\varphi)} \times 24 \qquad (11)$$

i = 2, 3, 4.

Il est rappelé qu'à une pleine mer succède une basse mer et inversement.

2.3.2. Calcul dc l'heure d'une pleine mer ou d'une basse mer

Cette heure se calcule par approximations successives à partir de t_{pb}. En effet, en utilisant la méthode de Newton, on détermine la suite des heures t_{pbi} définie comme suit :

$$\begin{aligned} t_{pb1} &= t_{pb} + \delta t_1 \\ t_{pb2} &= t_{pb1} + \delta t_2 \\ &\vdots \\ t_{pb(i+1)} &= t_{pbi} + \delta t_{(i+1)} \end{aligned}$$

avec :

$$\delta t_{(i+1)} = -\frac{R_1(t_{pb})\sin[\varphi_1'(t_{pbi})] + 2R_2(t_{pb})\sin[\varphi_2'(t_{pbi})] + 4R_4(t_{pb})\sin[\varphi_4'(t_{pbi})]}{2\pi\{R_1(t_{pb})\cos[\varphi_1'(t_{pbi})] + 4R_2(t_{pb})\cos[\varphi_2'(t_{pbi})] + 16R_4(t_{pb})\cos[\varphi_4'(t_{pbi})]\}} \times 24$$

où :

$$\varphi'_j(t_{pbi}) = \varphi'_j(t_{pb(i-1)}) + 15\, j\, \delta t_i \text{ si } i \neq 1$$

et

$$\varphi'_j(t_{pb}) = \varphi_j(t_{pb}) \quad \text{si } i = 1$$

Ce calcul itératif est arrêté lorsque $\delta_{t(i+1)}$ est inférieur à 2 minutes et la valeur t_{pbi} peut être adoptée comme heure de la pleine ou basse mer.

Remarque

Dans certains cas particuliers le processus itératif peut ne pas converger. Dans ce cas δt_i augmente au lieu de diminuer.

On admet que le processus itératif diverge lorsque $\left|\sum_i \delta t_i\right|$ devient supérieur à 3 heures.

Dans ce cas on procède de la manière suivante : le calcul est repris à partir de l'instant t_0 de la pleine ou basse mer précédant l'heure approchée t_{pb} de l'extremum recherché, ou à partir de 0 h 00 si aucune pleine mer ou basse mer n'a été calculée depuis le début de la journée.

On choisit un intervalle de temps d et on calcule la suite des heures :

$$t_e = t_0 + d + \varepsilon$$
$$t_{e1} = t_e + \delta_{t1}$$
$$t_{e2} = t_{e1} + \delta_{t2}$$
$$\vdots$$
$t_{ei+1} = t_{ei} + \delta_{ti}$ comme précédemment.

Si $\left|\sum_i \delta t_i\right|$ est supérieur à d, l'extremum ne peut se situer dans l'intervalle $[t_0, t_0 + d]$.

On reprend alors le même calcul à partir de l'heure $t_e = t_0 + 2d$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un extremum soit mis en évidence et calculé.

Dans les programmes qui sont proposés plus loin :

d = 1 h12 min (1/20 de jour) et ε = 18 minutes.

3. VALEURS NUMÉRIQUES

L'application numérique de la méthode exposée ci-dessus s'effectue en utilisant les tableaux I et II fournis ci-après et, pour un port donné, les valeurs des constantes Z_0, A_{ij} et G_{ij} .

TABLEAU I

Valeurs des paramètres astronomiques rapportés à l'instant origine :

1er janvier 1980 à 00 h 00 (UT)

$$s = 78{,}16° + 13{,}17639673\ T$$
$$h = 279{,}82° + 0{,}98564734\ T$$
$$p = 349{,}50° + 0{,}11140408\ T$$
$$N' = 208{,}10° + 0{,}05295392\ T$$
$$P_1 = 282{,}6° + 0{,}000047069\ T$$

TABLEAU II

	Baptême de l'onde	Amplitude	Situation	J	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
Onde annuelle	S_a	A_{sa}	G_{sa}	0	0	1	0	0	0	0
Ondes diurnes	K1	A_{K1}	G_{K1}	1	0	1	0	0	0	1
	O1	A_{O1}	G_{O1}	1	-2	1	0	0	0	-1
	Q1	A_{Q1}	G_{Q1}	1	-3	1	1	0	0	-1
	P1	$-\frac{1}{3}A_{K1}$	G_{K1}	1	0	-1	0	0	0	1
	*o*1 (correction nodale de O1)	$\frac{1}{5,3}A_{O1}$	G_{O1}	1	-2	1	0	-1	0	-1
	*k*1 (correction nodale de K1)	$\frac{1}{7,4}A_{K1}$	G_{K1}	1	0	1	0	1	0	1
Ondes semi-diurnes	M2	A_{M2}	G_{M2}	2	-2	2	0	0	0	0
	N2	A_{N2}	G_{N2}	2	-3	2	1	0	0	0
	S2	A_{S2}	G_{S2}	2	0	0	0	0	0	0
	2 N2	$\frac{1}{7,6}A_{N2}$	G_{N2}	2	-4	2	2	0	0	0
	μ2	$\frac{1}{6,3}A_{N2}$	G_{N2}	2	-4	4	0	0	0	0
	ν2	$\frac{1}{5,3}A_{N2}$	G_{N2}	2	-3	4	-1	0	0	0
	L2	$-\frac{1}{35}A_{M2}$	G_{M2}	2	-1	2	-1	0	0	0
	K2	$\frac{1}{3,7}A_{S2}$	G_{S2}	2	0	2	0	0	0	0
	T2	$\frac{1}{17}A_{S2}$	G_{S2} – 283 [1]	2	0	-1	0	0	0	0
	*m*2 (correction nodale de M2)	$-\frac{1}{27}A_{M2}$	G_{M2}	2	-2	2	0	-1	0	0
	*k*2 (correction nodale de K2)	$\frac{1}{12}A_{S2}$	G_{S2}	2	0	2	0	1	0	0
Ondes quart-diurnes	MN4	A_{MN4}	G_{MN4}	4	-5	4	1	0	0	0
	M4	A_{M4}	G_{M4}	4	-4	4	0	0	0	0
	MS4	A_{MS4}	G_{MS4}	4	-2	2	0	0	0	0

[1] Le terme correctif – 283° correspond pour cette onde à la valeur du terme $n_5 p_1$ de l'argument astronomique (formule 3) où l'on a négligé le terme variable avec le temps.

Constantes harmoniques

NOM DU PORT Position géographique Temps en usage	Zo (cm)	Constantes harmoniques { **Amplitude en mm** / *Situation en degrés*									
		Sa	Q1	O1	K1	N2	M2	S2	MN4	M4	MS4
BREST 48°23 N 4°30 W UT +1.0	**413**	47 *243*	**20** *294*	**67** *342*	**65** *89*	**415** *119*	**2040** *138*	**746** *178*	**19** *117*	**54** *164*	**34** *239*